240 – Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

On considère des fonctions de R^d dans C.

I) Produit de convolution

1) Définition et premières proprietés [Far] + [HL]

Déf : produit de convolution [Far 114]

Prop : convolution L^1*L^1 [Far 117] *(écrire direct les deux intégrales)*

Prop : convolution L^2*L^2 donne une fonction continue [Far 120] (important pour Plancherel !!)

Prop : inégalité de Young [HL 149] *(Fubini + Hölder)*

Prop : * est commutative et distributive par rapport à +. (L^1,4+,*) est donc une algèbre (non unitaire) [Far 118]

2) Régularisation et théorèmes de densité [ZQ] + [BMP] + [Far] + [Br] + [Gou]

But : approcher une fonction de L^p (resp. de C^k) par des fonctions lisses à support compact. Troncature et régularisation.

Th : troncature :

1- Cc^k est dense dans C^k pour la top usuelle de C^k qui est la cv unif sur tout compact et la cv unif des dérivées sur tout compact *(on multiplie f par des fonctions plateaux)*
2- L_c^p est dense dans L^p pour la norme p *(pareil)*
3- Cc est dense dans L^p pour la norme p *(pour p=1 : les fonctions étagées sont denses dans L^1. Il suffit de mq toute indicatrice de borélien peut être approchée pas des contions Cc. Soit A un borélien. 1_A est limite de 1_An où An sont des boréliens bornés, et pour n assez grand, ||1_A-1_An|| est très petit. Donc il suffit de montrer qu'on peut approcher un borélien borné par des fct Cc. A un borélien borné, contenu dans un ouvert borné W. Alors il existe une fonction continue nulle en dehors de W très proche de 1_A (théorème d'approximation, très long à montrer))*

Et maintenant, régularisation.

Prop : dérivation d'un produit de convolution [ZQ 320]

Csq : convoler un polynôme avec une fct L^1 à support compact donne un polynôme [ZQ 321]

Idée : convoler régularise la fonction. On va essayer d'approximer des fonctions par leurs convolées. Pour ça il faut convoler avec des fonction lisses, à support compact si possible.

Déf : identité approchée (IA) et à support compact (IAc) [BMP 119]

Ex : approximation de Poisson [Far 123]

Ex : approximation [Br 70]

Théorème :

- si f est continue et bornée, cv simple *(pour Plancherel)*
- si f est uniformément continue et bornée, alors Phi_n*f cv unif vers f
- si f est dans L^p alors Phi_n*L^p cv vers f dans L^p [BMP 119] *(le 2^{e} point utilise le fait que Cc dense dans L^p)*

Cor : Cc^infini est dense dans L^p pour la norme p et dans C^k pour la top usuelle [ZQ 325] *(pour le premier point, on prend f dans L^p à support compact, et Phi_n une IA à support compact. Alors Phi_n*f est lisse à support compact et cv* *vers f dans L^p. Donc Cc^infini est dense dans L^p_c, qui est dense dans L^p . Pour le second point, on prend f dans Cc^k, f est donc UC donc Phi_n*f cv uniformément vers f, donc Cc^infini est dense dans Cc^k, et Cc^k est dense dans C^k)*

Csq : soit f une fonction continue sur un segment J de R. Alors f est limite unif de polynômes [Gou 284] *(on prolonge f au-delà du segment pour la transformer en une fonction à support compact (on la relie continûment à zéro). Ca devient g. On convole g avec une identité approchée formée e polynômes (ça existe), g est donc limite uniforme de polynômes, donc f aussi)*

II) <u>Transformée de Fourier</u>

1) <u>Dans L^1</u>

Déf : [Far 130]

Prop : Riemann-Lebesgue + autres propriétés [Far 130 à 132]

Exemple de TF sur Gaussienne [Far 130]

Th : inversion Fourier pour les fonctions L^1 donc la TF est L^1 [Far 132] *(se base sur l'approximation de Poisson : Phi_n*f cv vers f en norme 1, mais par TCD, Phi_n*f cv vers une autre fonction, on en déduit l'égalité pp)*

2) <u>Dans la classe de Schwartz</u> [Far 135]

Déf

Prop : Cc^infini inclus dans S inclus dans L^p donc S(R) dense dans L^p

Prop : si f est dans S alors sa TF aussi *(utilise la dérivée sous l'intégrale, et l'expression de la dérivée d'une TF)*

Csq : si f est dans S, alors sa TF est L^1, donc on peut appliquer la formule d'inversion. Donc la TF est une bijection de S sur S.

3) <u>Prolongement sur L^2(R)</u>

Calcul d'intégral sur approx de Poisson avant le lemme [Far 132]

Formule de Plancherel sur L^1 inter L² (on mq c'est une isométrie à un coeff près)

Déf : transformation de Plancherel (là pour le coup c'est une vraie isométrie)

Th : Pf se prolonge sur L² en un isomorphisme isométrique *(le th de prolongement des appl linéaire nous garanti l'existence d'un prolongement qui ait même norme, mais ça nous dit pas que le prolongement reste une isométrie ni que le prolongement est surjectif)*

III) <u>Des applications</u>

1) <u>Séries de Fourier</u> [Gou] + [ZQ]

Th : f une fct continue et 2 Pi périod. Soit Sñ la somme des e_k de –n à n, et Cñ leur moyenne de Cesaro. Alors f*Cñ est un polynôme trigonométrique et converge uniformément vers f [Gou 286]

Cor : base hilbertienne de L² [ZQ 86] *(utilise la densité des fct continues dans L²)*

Cor : Weirstrass trigo [ZQ 87] *(attention pénible)*

2) <u>Riesz-Fréchet-Kolmogorov</u> [HL]

Th : [HL]

3) <u>En probabilités</u> [BL] + [Far]

Déf : fonction caractéristique [BL 62]

Rq : pour un vecteur aléatoire à densité, c'est presque la TF de la densité

Th : la fonction caractéristique caractérise la loi [BL 62] *(vraiment galère)*

Th : X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants à densité, la densité de la somme est la convolée des densités [BL 85]

Csq : somme de deux Gaussienne [BL 89] *(utilise la fonction caractéristique)*

Th : Lévy [Far 139] *(galère)*

Csq : TCL [BL 136] *(fonction caractéristique + Lévy)*

4) <u>EDP</u> [Laa]

Equation de la chaleur [Laa 264] *(TF + convolution)*

<u>Développements :</u>
1 - Théorème de Plancherel [Far 136] (**)
2 - Polynômes orthogonaux (base hilbertienne + appl à L^2) [Dem] + [BMP] (**)
3 - Lévy + TCL [ZQ] (**)
Fejér [Gou An 286] (**)
RFK [HL] (***)

<u>Bibliographie :</u>
[Far]
[HL]
[ZQ]
[BMP]
[Br]
[Gou]
[BL]
[Laa] Laamri – Mesure, intégration, convolution et TF des fonctions

<u>Pas mis :</u>
- Formule sommatoire de Poisson

<u>Rapport du jury 2005-2009</u> : si l'équation de la chaleur (en dimension 1) a pour origine la physique, sa résolution mathématique via la transformation de Fourier ne dispense pas le candidat de conserver une certaine rigueur mathématique. La validité de la formule TF(f')(x)=ixTF(f)(x), l'existence du produit de convolution doivent être convenablement circonscrits.